

4.11.

Minule:

polud existuje konečna $f'(x_0)$,

pak platí:

x_0 je lokální extrém fce f



x_0 je stacionární bod fce f
(tj. $f'(x_0) = 0$)

Idea: dáme předpis $f'(x)$

↓
spočítá derivaci $f'(x)$

↓
položím $f'(x) = 0$, vyřeším
a řeším tak stacion. body

↓
musím zjistit, zda tyto
stac. body jsou extrémny nebo ne

Def: V_f = množina vyjímecných
bodů fce f (= podezřelé body,
kandidáti na extrém):

a) stacionární body fce f , tj. $f'(x) = 0$

b) body, kde ~~f~~ neexistuje konečná
derivace $f'(x)$

c) krajní body D_f (= koncové
body otevř. i uzavř. intervalů)

Platí: ① Všechné extrémny fce f
musí ležet ve V_f .

② Fce f je ryze monotónní
~~na~~ na každém z intervalů
vymezených vyjim. body.

Jak určit typ monotonicity
(tj. zda f roste či klesá)
v každém takovém intervalu?

2 způsoby:

(A) pomocí znaménka derivace:

$$f'(x) > 0 \text{ v } I \Rightarrow f \text{ roste v } I$$

$$f'(x) < 0 \text{ v } I \Rightarrow f \text{ klesá v } I$$

(B) porovnání hodnot/limit f

ve vyjím. bodech: v bodech
z D_f máme hodnoty, v bodech
mimo D_f máme limity,
porovnáme sousední hodnoty
 $\Rightarrow f$ klesá/roste.

Př. 1: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

$D_f = \mathbb{R}$, průběhy s osami:

$D_g = [0, 4]$

P_x : lze spočítat kořeny $x_1 = -1$
 $x_2 = x_3 = 2$

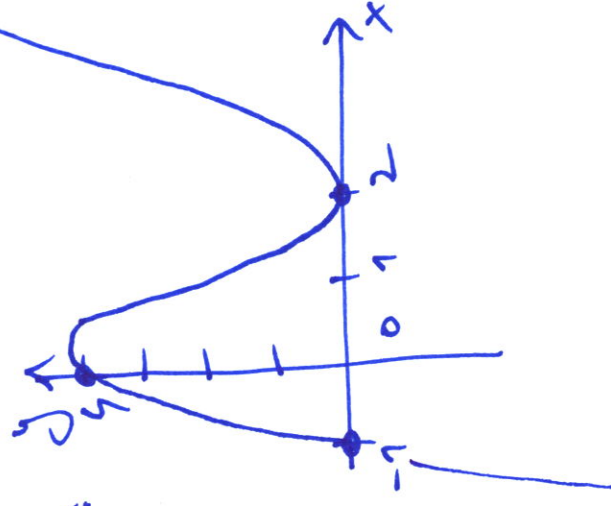
$P_x = [-1, 0], [2, 0]$

rozklad $f(x) = (x+1)(x-2)^2$

limity v krajních bodech D_f :

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 - 3x^2 + 4) = \pm\infty$

Předkresný graf:



Znaménko f' :

$x < -1 \Rightarrow f'(x) < 0$

$x > -1 \Rightarrow f'(x) > 0$

derivace: $f'(x) = 3x^2 - 6x, \forall x \in \mathbb{R}$

prozkoumáme: $3x^2 - 6x = 0$

$3x(x-2) = 0$

$\Rightarrow$ stac. body $x_A = 0, x_B = 2$

V_f : a) stac. body $0, 2$

b) body bez derivace... nejsou

c) krajní body $D_f: +\infty, -\infty$

$\Rightarrow V_f = \{-\infty, 0, 2, +\infty\}$

$\Rightarrow f$ je monotónní v H z intervalu

$(-\infty, 0), (0, 2), (2, +\infty)$

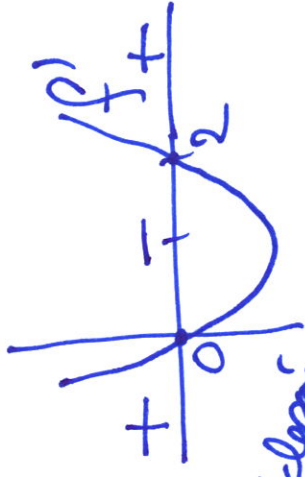
Uvědomte typ monotónie

(na každém z nich

- olemna zpisovaz :

A) pomocí znaménkové derivace:

$f'(x) = 3x^2 - 6x$



na $(0, 2)$ je $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ klesá

na $(-\infty, 0)$ je $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ roste

na $(2, +\infty)$ —————

B) porovnáním hodnot/limit

pro f ve vyjím. bodech - tabulka:

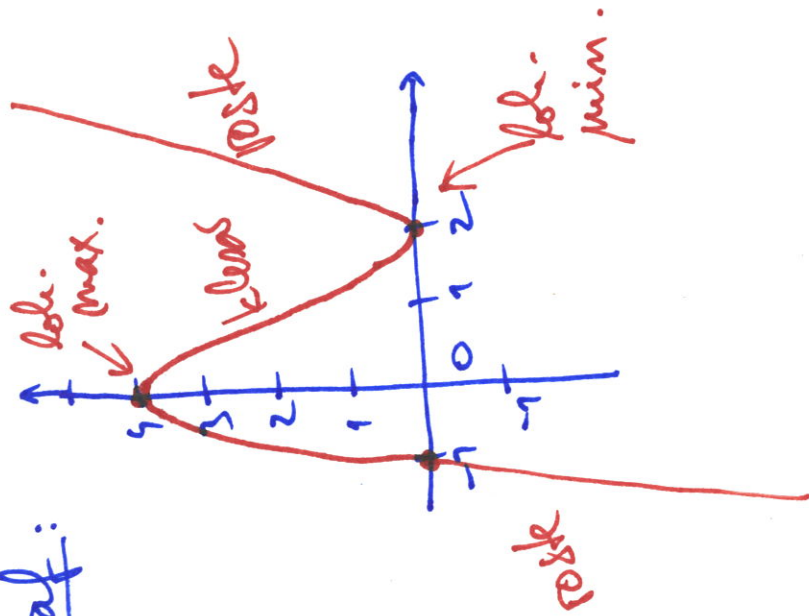
$x \in V_f$	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x)$ nebo $\lim f(x)$	$-\infty$	4	0	$+\infty$

lok. max.: $[0, 4]$

lok. min.: $[2, 0]$

glob. extrémny nejsou (protože limity $= \pm\infty$)
a obr hodnot $H_f = \mathbb{R}$

Graf:



limity v krajních bodech D_f :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{1-2x^2} = (+\infty) \cdot e^{-\infty} = (+\infty) \cdot 0 \text{ nejde}$$

"dondolíme"
 $x = +\infty$ $\uparrow$ $\left[\lim_{y \rightarrow \infty} e^y = 0 \right]$

L'Hospital: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{2x^2-1}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{2x^2-1} \cdot 4x} =$

$$= \frac{1}{(+\infty) \cdot (+\infty)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^{1-2x^2} = 0 \stackrel{L'H}{=} \text{stejným způsobem}$$

$\Rightarrow$ Předvíš graf:



Znaménko fce: $x \cdot e^{1-2x^2} \stackrel{>0}{\Rightarrow}$

$$x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$$

$$x < 0 \Rightarrow f(x) < 0$$

$$P_x = [0, 0]$$

$$f(x) = x \cdot e^{1-2x^2}$$

$D_f = \mathbb{R}$, průsečíky s osami:

$$P_y = [0, 0]$$

$$P_x: x \cdot e^{1-2x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\neq 0$$

$$\begin{aligned} \text{derivace: } f'(x) &= (x \cdot e^{1-2x^2})' = \\ &= 1 \cdot e^{1-2x^2} + x \cdot e^{1-2x^2} \cdot (-4x) = \\ &= e^{1-2x^2} \cdot (1-4x^2), \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{podořme } f'(x) = 0$$

$$\underbrace{e^{1-2x^2}}_{\neq 0} \cdot (1-4x^2) = 0$$

$$1-4x^2 = 0$$

$$1 = 4x^2$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \pm \frac{1}{2}$$

stacion. body :

V_f : a) stac. body $\pm \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

b) body bez derivace ... nejím

c) krajní body D_f : $\pm \infty$

$$V_f = \left\{ -\infty, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, +\infty \right\}$$

Metoda B) měřme typ monotonicity:

chci napřed znát hodnoty $f(-\frac{1}{2}), f(\frac{1}{2})$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot e^{1-2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot e^{1-\frac{2}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{e} \doteq 0,8$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{e} \doteq -0,8$$

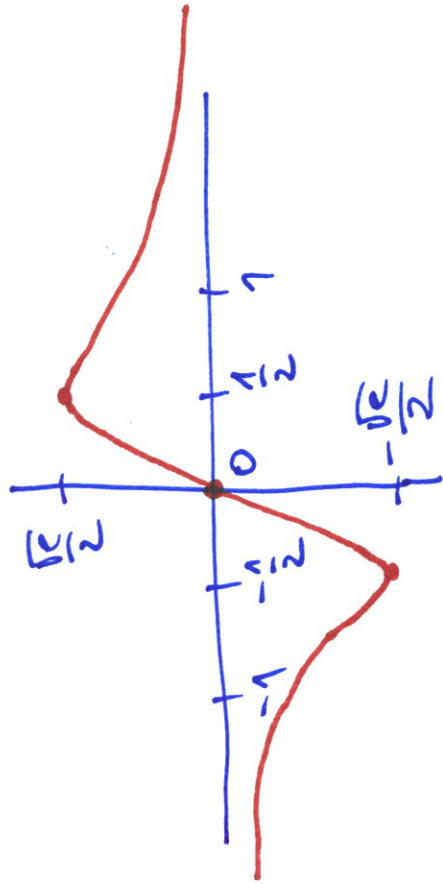
Tabulka:

$x \in V_f$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$ nebo $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x)$	0	$-\frac{\sqrt{e}}{2}$	$\frac{\sqrt{e}}{2}$	0

$\Rightarrow f$ klesá v $(-\infty, -\frac{1}{2})$

a v $(\frac{1}{2}, +\infty)$

f roste v $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



Glob. max.: $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{2}\right]$

Glob. min.: $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{e}}{2}\right]$

$$H_f = \left\langle -\frac{\sqrt{e}}{2}, \frac{\sqrt{e}}{2} \right\rangle$$

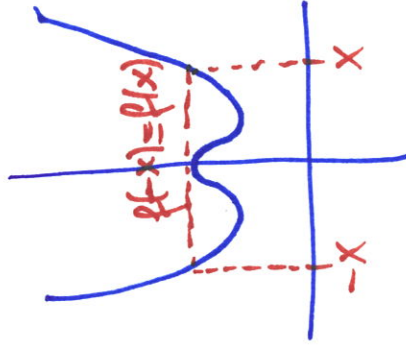
Funkce se symetrickými grafy

Def: fce f je

sudá: $\forall x \in D_f : f(-x) = f(x)$

lichá: $\forall x \in D_f : f(-x) = -f(x)$

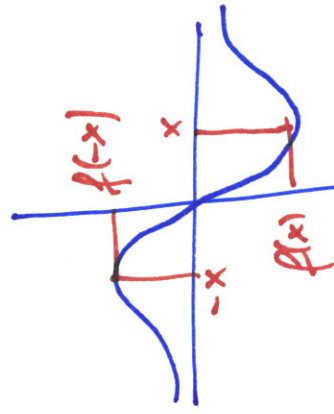
Pozn: aby fce vůbec mohla být
sudá resp. lichá, musí mít
symetrický def. obor (podle mly).



sudá fce má graf

osově symetrický

podle osy y



lichá fce má

graf středově

symetrický (podle 0)

Příkladní příklad: mocniny x^k

x^k sudá $\Rightarrow x^k$ sudá $\rightarrow$

x^k lichá $\Rightarrow x^k$ lichá $\rightarrow$

$$\underline{P_7} := 3x^6 - 5x^4 + 3x^2 + 7$$

je sudá fce (má samej
sudej mocniny včetně
konstanty: $x^0 = 1$)

- $4x^3 - 2x \dots$ lichá fce
- $x^3 + x^2$ ani sudá ani lichá
- $f(x) = x \cdot e^{1-2x^2}$

dosadíme $-x$:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{f(-x)}} &= -x \cdot e^{1-2(-x)^2} = \\ &= -x \cdot e^{1-2x^2} = \underline{\underline{-f(x)}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ je lichá

Zjistíme, že je fce sudá / lichá,
můžeme vštípit část výpočtu.